Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις (4-2-2016): Σύντομες απαντήσεις - Υποδείξεις

1. i) Να δοθεί ό ορισμός της συνθήκης Lipschitz για μια συνάρτηση $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$).

Υπόδειξη. Σελίδα 10.

Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x,y) = xy^4, x, y \in \mathbb{R}$ πληροί την συνθήκη στο καθένα από τα σύνολα α) $S_1 = \{(x,y) : |x| \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$, β) $S_2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, |y| \leq 1\}$.

Υπόδειξη. α) Αν υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη στο S_1, τότε θα πρέπει να ισχύει

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x||y_1 - y_2||y_1 + y_2|(y_1^2 + y_2^2) \leq K|y_1 - y_2|$$

και

$$|x||y_1 + y_2|(y_1^2 + y_2^2) \leq K, \quad |x| \leq 1, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι για $x = 1/2, y_2 = 0, y_1 \in \mathbb{R}$ (είναι $(1/2, 0), (1/2, y_1) \in S_1$) θα πρέπει

$$|y_1|(y_1^2) \leq 2K, \quad \forall y_1 \in \mathbb{R}$$

που είναι άτοπο. Το β) αντιμετωπίζεται με τον ανάλογο τρόπο.

ii) Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \frac{cos(x^2y)}{1 - x^2}, \quad y(0) = 2,$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1, 1)$ και να διατυπωθεί το Θεώρημα που χρησιμοποιήθηκε.

Υπόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί ότι για $r \in (0,1)$ η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στο $[-r, r]$. Για την μερική (ως πρός y) παράγωγο της $f(x,y) = \frac{cos(x^2y)}{1-x^2}$ είναι

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| = |\frac{-x^2sin(x^2y)}{1 - x^2}| \leq |\frac{1}{1 - x^2}| \leq \frac{1}{1 - r^2} \quad x \in [-r, r], y \in \mathbb{R}.$$

Η $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ είναι συνεχής στο σύνολο $S_r := [-r, r] \times \mathbb{R}$ και φραγμένη, συνεπώς (σελ. 11) η f πληροί μια συνθήκη Lipschitz στο S_r. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 2, σελ. 17 (Διατύπωση).

2. i) *Μέθοδος μεταβολής των σταθερών:* Να διατυπωθεί (λεπτομερώς) και να αποδειχθεί το θεώρημα το σχετικό με την εύρεση μιας μερικής λύσης της εξίσωσης

$$a_3(x)y'''(x) + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x), \quad x \in I.$$

Υπόδειξη. Θεώρημα 14, σελ. 86-88.

ii) Να λυθεί η εξίσωση $(2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0$ και να προσδιοριστεί η λύση της με $y(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$.

Υπόδειξη. Είναι ομογενής γ.δ.ε. (...). Για $y = vx$ ανάγεται στην

$$\frac{dx}{x} + \frac{(v - 1)dv}{v^2 + 2v + 2} = 0.$$

από την οποία με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$lnx + \frac{1}{2}ln(v^2 + 2v + 2) - 2Arctan(v + 1) = C$$

και
$$ln(y^2+2xy+2x^2)-4Arctan(\frac{x+y}{x})=C.$$
Για $y=0, x=1/\sqrt{2}$ βρίσκουμε
$$ln(0+0+1)-4Arctan(\frac{1/\sqrt{2}+0}{1/\sqrt{2}})=C\Rightarrow 0-4Arctan1=C.$$
και $C=-\pi$.

Παρατήρηση για την ολοκλήρωση: Είναι
$$\frac{v-1}{v^2+2v+2}=\frac{v+1-2}{(v+1)^2+1}=\frac{1}{2}\frac{2(v+1)}{(v+1)^2+1}-2\frac{1}{(v+1)^2+1}.$$

3. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y'(x)-\frac{1}{x}y=\{\begin{array}{cc}-2x-\frac{4}{x}, & x\in[1,2]\\ x^2, & x\in(2,4],\end{array}\quad y(1)=1.$$

i) Να εξετασθεί αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί το π.α.τ..
Υπόδειξη. Αν συμβολίσουμε με $g(x)$ την συνάρτηση του δεξιού μέλους της εξίσωσης τότε (...)
$$y(x)=e^{\int_1^x(1/s)ds}[y(1)+\int_1^x g(s)e^{\int_1^s(-1/u)du}ds]\quad x\in[1,4].$$
Η y είναι συνεχής στο $[1,4]$ (γιατί;) και παραγωγίσιμη (γιατί;) στο καθένα από τα διαστήματα $[1,2],(2,4]$.

ii) Να εξετασθεί αν υπάρχει συνάρτηση στο $C^1[1,4]$ που ικανοποιεί το π.α.τ.. Εξηγήσετε κατά πόσον η απάντησή σας αντίκειται ή όχι στο σχετικό θεώρημα ύπαρξης λύσεων.
Υπόδειξη. Αν υποτεθεί ότι υπάρχει συνάρτηση $y\in C^1[1,4]$ που ικανοποιεί την εξίσωση, τότε η συνάρτηση $g(x):=y'(x)-\frac{1}{x}y(x)$ θα πρέπει να είναι συνεχής, που προφανώς είναι άτοπο. Το συμπέρασμα δεν αντίκειται σε κανένα από τα Θεωρήματα ύπαρξης (1 και 2, σελ. 12-17) μιας και οι συναρτήσεις $f(x,y)$ στα εν λόγω θεωρήματα θα πρέπει να είναι συνεχείς (...).
Άλλος τρόπος: Υπολογίστε (με ολοκλήρωση σε δύο βήματα) την συνάρτηση y και επιλέξτε κατάλληλα την σταθερά ολοκλήρωσης για την συνέχεια. Η συνάρτηση που προκύπτει δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

4. i) Με χρήση της αντικατάστασης $u=y\sqrt{x}$ να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση
$$x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=b(x),\quad x>0.$$

Υπόδειξη. Είναι $y=ux^{-1/2}$ και
$$y'(x)=u'x^{-1/2}-\frac{1}{2}x^{-3/2}u,\quad y''(x)=u''x^{-1/2}-u'x^{-3/2}+\frac{3}{4}x^{-5/2}u.$$
Αντικαθιστώντας στην εξίσωση προκύπτει η (γραμμική) εξίσωση δεύτερης τάξης (με σταθερούς συντελεστές)
$$u''+u=b(x)x^{-3/2},\tag{1}$$

της οποίας η αντίστοιχη ομογενής έχει ως ένα βασικό σύνολο λύσεων το σύνολο $\{u_1(x) = cosx, u_2(x) = sinx\}$. Για την εύρεση μιας μερικής λύσης της (1) μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο της μεταβολής των σταθερών (ή το Θεώρημα 15). Βρίσκουμε

$$W(u_1, u_2)(x) = 1, \quad W_1(u_1, u_2)(x) = -sinx, \quad W_2(u_1, u_2)(x) = cosx,$$

και συνεπώς (...) μια μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (1) είναι η

$$u_0 = sinx \int_1^x costb(t)t^{-3/2}dt - cosx \int_1^x sintb(t)t^{-3/2}dt \quad x > 0,$$

από όπου έπεται ότι για $x > 0$ είναι

$$y(x) = x^{-1/2}\{c_1 sinx + c_2 cosx + sinx \int_1^x costb(t)t^{-3/2}dt - cosx \int_1^x sintb(t)t^{-3/2}dt\}.$$

ii) Αν $b(x) = e^{-x}$, να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις μη φραγμένες στο $[1, \infty)$.
Υπόδειξη. Για $b(x) = e^{-x}$ και $x \geq 1$ έχουμε

$$|y(x)| \leq 1 \cdot \{|c_1| + |c_2| + \int_1^x e^{-t}dt + \int_1^x e^{-t}dt\} = |c_1| + |c_2| + \frac{2}{e}.$$

Παρατηρήσεις.

(i) Ασκήσεις B-14 (Φυλ. άλυτων ασκήσεων) και B-26, σελ. 37, B-28 σελ. 39 (Φυλ. λυμένων ασκήσεων).

(ii) Γενικά:

$$lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \nRightarrow lim_{x\to\infty} \int_a^x f(s)ds = 0.$$

(iii) Επίσης, $f(x)$ φραγμένη $\nRightarrow \int_a^x f(s)ds$ φραγμένο στο $[a, +\infty)$.

5. Θεωρούμε την εξίσωση

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

i) Να διατυπώσετε το συμπέρασμα το σχετικό με την εύρεση ενός βασικού συνόλου λύσεων της εξίσωσης γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.
Υπόδειξη. Θεώρημα 2, σελ. 249-250, περίπτωση ii).

ii) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση δέχεται ως λύση γύρω από το σημείο $x_0 = 0$ μια άρτια συνάρτηση της οποίας να βρεθεί το πεδίο ορισμού και ένα άνω φράγμα στο διάστημα $[1, 2]$.
Υπόδειξη. Άσκηση C-7, σελ. 51-52, Φυλλάδιο με λυμένες ασκήσεις. Ζητείται μόνον η (άρτια) λύση y_1. Για ένα φράγμα της στο $[1, 2]$, είναι

$$|y_1(x)| \leq \sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \leq \frac{2^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \leq \frac{1}{n!} = \frac{1}{e}.$$

Οι παραπομπές αναφέρονται στο σύγγραμμα και τα φυλλλάδια ασκήσεων του Καθηγητή Χ. Γ. Φίλου, ¨Μια Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις¨ .